MLADI NADARENI MATEMATIČARI
Marin Getaldić

2. MATEMATIČKO NATJECANJE UČENIKA BALKANA

2nd Balkan Student Mathematical Competition

Studeni 2009.

1. razred

Zadatak 1. Neka su a, b, c nenegativni realni brojevi takvi da je $c \leq a$ i $c \leq b$, te neka je $r \geq 3$ neparan prirodan broj. Dokaži nejednakost

$$a^{r-1}(a-b)(a-c)+b^{r-1}(b-c)(b-a) \geq (a-b)^2 (b-c)^{\frac{r-1}{2}} (a-c)^{\frac{r-1}{2}} .$$

Kad se postiže jednakost? *(Tuan Le)*

Zadatak 2. Dokaži da je kutiju dimenzija $a \times b \times c$ $(a, b, c \in \mathbb{N})$ moguće u potpunosti (i bez ostatka) ispuniti kvadrima dimenzija $4 \times 1 \times 1$ ako i samo ako se barem dva od sljedećih pravokutnika: $a \times b$, $a \times c$, $b \times c$, mogu popločati u potpunosti i bez ostatka pločama dimenzija 4×1. *(Harun Šiljak)*

Zadatak 3. Dan je šiljastokutan trokut ABC s visinama $\overline{AA_1}$ i $\overline{BB_1}$. Vrhom C povučen je pravac okomit na težišnicu $\overline{CP}$ trokuta ABC koji siječe polupravce PA_1 i PB_1 redom u točkama M i N. Ako je trokut PMN jednakostraničan, dokaži da je i trokut ABC jednakostraničan.

(Adrian Satja Kurdija)

Zadatak 4. Odredi sve prirodne brojeve n takve da je broj $1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \ldots + (n+1) \cdot 2^n$

(a) djeljiv s n,

(b) potpuni kvadrat.

(Marko Radovanović)

Vrijeme rješavanja je 240 minuta.
Svaki se zadatak boduje s 10 bodova.
Svaki zadatak pisati na poseban papir.
Nije dozvoljena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih pomagala, osim šestara i ravnala.